

The background is a digital illustration of a pond. The water is dark blue and black, reflecting the sky and surrounding elements. On the left, a power line tower with several wires extends into the water. The right side of the image is filled with the reflection of cherry blossom trees, showing delicate pink and white blossoms. The overall color palette is dominated by deep blues, blacks, and soft pinks from the blossoms. A purple banner is positioned across the middle of the image.

水鏡

2024 年 2 月 1 日

题意简述

给定一个长度为 n 的正整数序列 $h_1, h_2, \dots, h_n$, 求满足以下所有条件的二元组 (u, v) 的数量:

- $1 \leq u < v \leq n$, 且 u, v 为整数;
- 存在正实数 L 以及一个长度为 $(v - u + 1)$ 的序列 $r_u, r_{u+1}, \dots, r_v$ 满足以下所有条件:
 - $\forall u \leq i \leq v$, 记 $h'_i = 2L - h_i$, 则 $r_i \in \{h_i, h'_i\}$;
(特别地, 当 $h_i = h'_i$ 时, $r_i = h_i$)
 - $\forall u \leq i < v, r_i < r_{i+1}$ 。

算法一: $\tilde{O}(2^n)$

枚举 $\binom{n}{2}$ 组 u, v , 再枚举 $r_u \sim r_v$ 的 2^{v-u+1} 种选择, 判断是否存在一种选择满足 $r_u < r_{u+1} < \dots < r_v$ 。

复杂度 $\tilde{O}(2^n)$, 可以通过子任务一, 期望得分 7。

算法二： $O(n^3)$

建立图论模型：对所有 $1 \leq i \leq n$ ，在平面直角坐标系上标记点 (i, h_i) 和 $(i, 2L - h_i)$ ，共 $2n$ 个点。对于两个被标记的点 $p_1 = (x_1, y_1)$ ， $p_2 = (x_2, y_2)$ ，若满足 $x_2 = x_1 + 1$ 且 $y_1 < y_2$ ，则连接有向边 $p_1 \rightarrow p_2$ 。本质上，我们想探究这张有向图的可达性。

点 (i, h_i) 是固定不动的，点 $(i, 2L - h_i)$ 会随着 L 的变化而运动，相邻层之间的连边有 $O(1)$ 种可能的情况，每种情况生效的 L 都是一个区间。

于是，我们可以将 L 的可能取值划分为 $O(n)$ 个区间，每个区间内，有向图的结构都不变。

对于确定的图，简单 $O(n^2)$ 搜索（或递推）即可求出所有好对子，总复杂度 $O(n^3)$ 。

复杂度 $O(n^3)$ ，可以通过子任务一、二，期望得分 15。

算法三: $O(n^2)$

沿用算法二的思路, 对 L 分段讨论。

对于确定的图, 按 x 坐标从左往右 DP, 记 l_u 为在点 u 结束的路径出发点 x 坐标的最小值, 转移显然。所有的 l 可以 $O(n)$ 求出。

记 $u_i = (i, h_i)$, $u'_i = (i, 2L - h_i)$, $s_i = \min(l_{u_i}, l_{u'_i})$, 则 $(s_i, i), (s_i + 1, i), \dots, (i - 1, i)$ 都是好对子。

对每个 i 记录 s_i 的最小值, 则好对子总数为 $\sum_{i=1}^n i - s_i$ 。

复杂度 $O(n^2)$, 可以通过子任务一、二、三, 期望得分 35。

算法四： $O(n \log n)$

记 $p_i = \max(h_i, 2L - h_i)$ ，存在符合题意的 $r_{u \sim v}$ 当且仅当：存在 $t \in \{u \sim v - 1\}$ ，使得 $p_{u \sim t}$ 严格递减， $p_{t+1 \sim v}$ 严格递增。 p_t, p_{t+1} 之间是等号、不等号都可以。

形式化地，我们想要的是 $p_u > p_{u+1} > \dots > p_t$? $p_{t+1} < \dots < p_v$ 。

让 L 从小到大增加， p 之间的不等号会逐个改变，可以用 `std::set` 维护合法的极长 “ $> > > ? < < <$ ” 区间。区间每次变化时（注意，可能有多个不等号同时变化），记下新的区间 (l_i, r_i) ，使用单调栈求出所有区间的下包络，容易求出子区间总数。

复杂度 $O(n \log n)$ ，期望得分 100。

算法五: $O(n)$

延续算法四的思路, $p_u > p_{u+1} > \dots > p_t$? $p_{t+1} < \dots < p_v$ 可以转化为 $p_u \sim p_v$ 中不存在 $p_{i-1} \leq p_i \geq p_{i+1}$ 。

考虑水位变化给 p 带来的影响。我们只关心相邻的 p_i, p_{i+1} 的相对大小, 不妨设 $h_i > h_{i+1}$, 分类讨论可知

- 当 $L < \frac{h_i + h_{i+1}}{2}$ 时, $p_i > p_{i+1}$
- 当 $L > \frac{h_i + h_{i+1}}{2}$ 时, $p_i < p_{i+1}$
- 当 $L = \frac{h_i + h_{i+1}}{2}$ 时, $p_i = p_{i+1}$

另一种情况类似。

对于每个 i , “不存在 $p_{i-1} \leq p_i \geq p_{i+1}$ ” 都对 L 提出一个约束, 形如 “ L 不属于某区间”。

现在问题就转化成, 给出 $N = n - 1$ 个区间 $l_1, l_2, \dots, l_N$, 求有多少对 l, r 满足 $l_l \sim l_r$ 的并不是全集。

答案区间集合显然符合双指针性质。信息支持 $O(1)$ 合并, 不支持删除, 用不可删双指针即可做到 $O(n)$ 。期望得分 100。

感谢聆听!