水镜

2024 年 2 月 1 日

题意简述

给定一个长度为 n 的正整数序列 $h_1, h_2, \cdots, h_n$，求满足以下所有条件的二元组 (u, v) 的数量：

- $1 \le u < v \le n$，且 u, v 为整数；
- 存在正实数 L 以及一个长度为 $(v - u + 1)$ 的序列 $r_u, r_{u+1}, \cdots, r_v$ 满足以下所有条件：
    - $\forall u \le i \le v$，记 $h'_i = 2L - h_i$，则 $r_i \in \{h_i, h'_i\}$；
      (特别地，当 $h_i = h'_i$ 时，$r_i = h_i$)
    - $\forall u \le i < v, r_i < r_{i+1}$。

算法一：$\tilde{O}(2^n)$

枚举 $\binom{n}{2}$ 组 u, v，再枚举 $r_u \sim r_v$ 的 2^{v-u+1} 种选择，判断是否存在一种选择满足 $r_u < r_{u+1} < \cdots < r_v$。

复杂度 $\tilde{O}(2^n)$，可以通过子任务一，期望得分 7。

算法二：$O(n^3)$

建立图论模型：对所有 $1 \le i \le n$，在平面直角坐标系上标记点 (i, h_i) 和 $(i, 2L - h_i)$，共 $2n$ 个点。对于两个被标记的点 $p_1 = (x_1, y_1)$，$p_2 = (x_2, y_2)$，若满足 $x_2 = x_1 + 1$ 且 $y_1 < y_2$，则连接有向边 $p_1 \to p_2$ 。本质上，我们想探究这张有向图的可达性。

点 (i, h_i) 是固定不动的，点 $(i, 2L - h_i)$ 会随着 L 的变化而运动，相邻层之间的连边有 $O(1)$ 种可能的情况，每种情况生效的 L 都是一个区间。

于是，我们可以将 L 的可能取值划分为 $O(n)$ 个区间，每个区间内，有向图的结构都不变。

对于确定的图，简单 $O(n^2)$ 搜索（或递推）即可求出所有好对子，总复杂度 $O(n^3)$。

复杂度 $O(n^3)$，可以通过子任务一、二，期望得分 15。

算法三：$O(n^2)$

沿用算法二的思路，对 L 分段讨论。

对于确定的图，按 x 坐标从左往右 DP，记 l_u 为在点 u 结束的路径出发点 x 坐标的最小值，转移显然。所有的 l 可以 $O(n)$ 求出。

记 $u_i=(i,h_i)$，$u'_i=(i,2L-h_i)$，$s_i=\min(l_{u_i},l_{u'_i})$，则 $(s_i,i),(s_i+1,i),\ldots,(i-1,i)$ 都是好对子。

对每个 i 记录 s_i 的最小值，则好对子总数为 $\sum_{i=1}^{n} i-s_i$。

复杂度 $O(n^2)$，可以通过子任务一、二、三，期望得分 35。

记 $p_i = \max(h_i, 2L - h_i)$，存在符合题意的 $r_{u\sim v}$ 当且仅当：存在 $t \in \{u \sim v-1\}$，使得 $p_{u\sim t}$ 严格递减，$p_{t+1\sim v}$ 严格递增。p_t, p_{t+1} 之间是等号、不等号都可以。

形式化地，我们想要的是 $p_u > p_{u+1} > \cdots > p_t \ ? \ p_{t+1} < \cdots < p_v$。

让 L 从小到大增加，p 之间的不等号会逐个改变，可以用 std::set 维护合法的极长 “$> > > ? < < <$” 区间。区间每次变化时（注意，可能有多个不等号同时变化），记下新的区间 (l_i, r_i)，使用单调栈求出所有区间的下包络，容易求出子区间总数。

复杂度 $O(n \log n)$，期望得分 100。

延续算法四的思路，$p_u > p_{u+1} > \cdots > p_t \ ? \ p_{t+1} < \cdots < p_v$ 可以转化为 $p_u \sim p_v$ 中不存在 $p_{i-1} \le p_i \ge p_{i+1}$。

考虑水位变化给 p 带来的影响。我们只关心相邻的 p_i, p_{i+1} 的相对大小，不妨设 $h_i > h_{i+1}$，分类讨论可知

- 当 $L < \frac{h_i+h_{i+1}}{2}$ 时，$p_i > p_{i+1}$
- 当 $L > \frac{h_i+h_{i+1}}{2}$ 时，$p_i < p_{i+1}$
- 当 $L = \frac{h_i+h_{i+1}}{2}$ 时，$p_i = p_{i+1}$

另一种情况类似。

对于每个 i，“不存在 $p_{i-1} \le p_i \ge p_{i+1}$”都对 L 提出一个约束，形如“L 不属于某区间”。

现在问题就转化成，给出 $N = n - 1$ 个区间 $I_1, I_2, \ldots, I_N$，求有多少对 l, r 满足 $I_l \sim I_r$ 的并不是全集。

答案区间集合显然符合双指针性质。信息支持 $O(1)$ 合并，不支持删除，用不可删双指针即可做到 $O(n)$。期望得分 100。

感谢聆听！