

The 2nd Universal Cup Stage 28 / A. Add One 2

题目大意

有一个初始全为 0 的序列 a ，每次操作可以选择一个长度为 k 的前缀或后缀加 1，代价为 k ，求若干次操作后使得 $a_i \geq b_i$ 的最小代价和。

数据范围：数据组数 $T \leq 10^5$ ， $1 \leq n$ ， $\sum n \leq 10^6$ 。

写出这个问题的线性规划对偶版本，相当于要求一个数组 w_i 满足 $\sum_{j=1}^i w_j \leq i$ ， $\sum_{j=i}^n w_j \leq n - i + 1$ ，并且最大化 $\sum w_i b_i$ 。

注意到当枚举 $\sum w_i$ 之后，两个限制都可以写成关于前缀和的形式，然后就可以从左往右贪心地考虑每个 1 能放的区间左右端点，贪心地选择 b_i 最大的那个即可。根据猜测和打表可知这个答案关于 $\sum w_i$ 的函数具有凸性，可以三分解决。

总时间复杂度为 $\mathcal{O}(n \log n)$ ，并且可以拓展到每个前缀后缀有各自代价的情形。