QOJ8004 Bit Component

题目大意

给你一个正整数 n，你需要构造一个长度为 n 的排列，满足：

- 把所有数的二进制表示按该排列的顺序排成一列，其中最低位对齐，那么二进制表示中所有 `1` 的位置形成一个四连通块。

构造任意一组方案，或者报告无解。

数据范围

- $1 \le n \le 2 \cdot 10^5$。

解题过程

怎样的序列是有解的?

通过手玩，我们发现：形如 $n = 2^k - 1$ 的 n 是有解的，比如我们可以这样构造：以 $n = 1$ 开始。假设 $n = 2^m - 1$ 时得到了答案 $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$，则构造一个排列：$(a_1, a_2, \ldots, a_n, 2^m + a_n, 2^m + a_{n-1}, \ldots, 2^m + a_1, 2^m)$。该序列是 $n' = 2^{m+1} - 1$ 的答案，读者可以自行验证。

事实上，其他的 n 可能也有解。首先忽略 $n \le 3$ 的情况。可以发现，形如 $2^k \le n < 2^k + 2^{k-1}$ 的 n 一定无解，因为第 k 位无法与低位连通。如果 $n = 2^k + 2^{k-1}$，只有数 n 的第 k 位与 $k - 1$ 位连通。此时，从 n 出发向上下两侧考虑连通性，则 n 要么连接一个小于 2^k 的数，此时也无法连接第 k 位；要么连接一个含有第 k 位的数，但根据之前的推理，这个数的高位与低位（如果存在）也是无法连通的。

对于 $n = 2^k + 2^{k-1} + 1$，情况就不一样了。接下来描述这种情况的构造：

首先以 $n = 7 = 2^m - 1$ 的构造 $(1, 3, 2, 6, 4, 5, 7)$ 开始，这样得到 $n' = 2n + 1$ 的一种解：

$(a_1, a_2, \ldots, a_n, 2^m + 2^{m-1}, 2^m, 2^m + f(a_2), 2^m + f(a_3), \ldots, 2^m + f(a_n))$

其中 $f(x)$ 表示把 x 按二进制表示翻转，即交换最高位和最低位，交换次高位和次低位等。读者不难验证该序列确实是 $n' = 2n - 1$ 的解，且还满足一个性质：序列的最后一个元素等于 n'。

设 $a^{(k)}$ 是 $2^k - 1$ 按上述构造得到的解，$b^{(k)}$ 是任意一组开头含有最低位，且末尾含有最高位的解。那么可以得到一组 $n = 2^k + 2^{k-1} + 1$ 的解：

$(a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \ldots, a_{2^k-1}^{(k)}, 2^k + 2^{k-1} + 1, 2^k + b_1^{(k-1)}, 2^k + b_2^{(k-1)}, \ldots, 2^k + b_{2^{k-1}-1}^{(k-1)}, 2^k + 2^{k-1}, 2^k)$

然后，在该序列的基础上，可以构造 n 更大的解：对于大于 $2^k + 2^{k-1} + 1$ 的数 x，只需在 $y = x - 2^k$ 的旁边插入 x 即可，可以说明这不影响连通性。

整个过程可以做到时空复杂度 $O(n)$。

参考资料

暂无